

Universos Primitivos com Constante Cosmológica Negativa e Fluido de Poeira na teoria de Einstein-Aether

F.R. Manhães¹ - fabio.ramos@iprj.uerj.br

V.J. Monteiro² - vagner.jandre@iprj.uerj.br

Castro Júnior, A.O.³ - alessandro.castro@iprj.uerj.br

G.A. Monerat⁴ - monerat@iprj.uerj.br

J.C.G. Tedesco⁵ - tedesco@iprj.uerj.br

F.G. Alvarenga⁶ - flavio.alvarenga@ufes.br

G. Oliveira-Neto⁷ - gilneto@fisica.uff.br

^{1,2,3,4,5} Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo – RJ

⁶ Universidade Federal do Espírito Santo – Vitória – ES

⁷ Universidade Federal de Juiz de Fora – Juiz de Fora – MG

Resumo

Este trabalho investiga universos primitivos com constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$) e fluido de poeira na teoria de Einstein-Aether, uma extensão da relatividade geral que incorpora um campo vetorial unitário (Éter) que quebra a simetria de Lorentz. Utilizando o formalismo de Dirac para quantização canônica, o estado quântico do universo é descrito por operadores de vínculo. A equação diferencial resultante é resolvida numericamente via método de Galerkin, com implementação computacional em Python, para obter autovalores (níveis de energia E_n) e autofunções no espaço de Hilbert $L^2(0, \infty)$. Os resultados, validados contra o pacote *Spectral* em linguagem *Maple*, mostram precisão elevada (variação máxima de $\sim 10^{-10}$).

Palavras chaves: Modelo de Einstein-Aether, Cosmologia Quântica, Método de Galerkin

Abstract

This work investigates early universes with a negative cosmological constant ($\Lambda < 0$) and dust fluid in the Einstein-Aether theory, an extension of general relativity that incorporates a unit timelike vector field (Aether) which breaks Lorentz symmetry. Using Dirac's formalism for canonical quantization, the quantum state of the universe is described by constraint operators. The resulting differential equation is solved numerically using the Galerkin method, with computational implementation in Python, to obtain eigenvalues (energy levels E_n) and eigenfunctions in the Hilbert space $L^2(0, \infty)$. The results, validated against the *Spectral* package (Maple), show high accuracy (maximum deviation of $\sim 10^{-10}$).

Keywords: Einstein-Aether model, Quantum Cosmology, Galerkin method.

1. Introdução

A teoria de Einstein-Aether é uma extensão da relatividade geral que introduz um campo vetorial unitário, o Aether, quebrando a simetria de Lorentz e estabelecendo um referencial privilegiado no espaço-tempo. Na quantização, utiliza-se o formalismo de Dirac para tratar os vínculos do sistema, generalizando a

quantização canônica e definindo o estado quântico do universo por meio de operadores de vínculo, em vez de uma equação de Wheeler-DeWitt padrão. Para resolver as equações diferenciais resultantes, aplica-se o método de Galerkin e desenvolve uma implementação computacional em Python para obter os resultados dos níveis de energia, isto é, os autovalores e os autovetores, que aproxima as soluções por combinações lineares de funções de base no espaço de

Hilbert $L^2(0, \infty)$, garantindo a convergência das funções de onda. Essas funções são analisadas sob a interpretação de muitos mundos, calculando valor esperado do fator de escala para verificar a existência de singularidades iniciais.

2. Metodologia

Dado o Hamiltoniano do modelo de Einstein-Aether em Calibre Conforme, definido na equação (1).

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_a^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 - \Lambda a^4 - a p_\tau \quad (1)$$

Em termos de operadores, e com base nos textos de [1] e [2], quantizando obtemos:

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(a, \tau)}{\partial a^2} + V_{ef} \Psi(a, \tau) + ia \frac{\partial \Psi(a, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (2)$$

Reescrevendo:

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(a, \tau)}{\partial a^2} + V_{ef} \Psi(a, \tau) = -ia \frac{\partial \Psi(a, \tau)}{\partial \tau} \equiv E \quad (3)$$

Onde, $V_{ef} = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 - \Lambda a^4$. Resolvendo por separação de variáveis, podemos escrever:

$$\Psi(a, \tau) = \psi(a) T(\tau) \quad (4)$$

na qual, a solução temporal, é dada por:

$$T(\tau) = e^{-i E_n \tau} \quad (5)$$

e solução espacial, dada por:

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi(a, \tau)}{\partial a^2} + \left(\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 - \Lambda a^4 - a E_n \right) \psi(a) = 0 \quad (6)$$

Vamos aplicar o Método de Galerkin, para obter os níveis de energia associados ao sistema.

O Método de Galerkin, como conhecido hoje, foi formalizado por Boris Grigoryevich Galerkin em 1915, em seu artigo seminal publicado na revista russa Vestnik Inzhenerov [3]. Nesse trabalho, Galerkin propôs um método geral para resolver equações diferenciais parciais, utilizando funções de base para projetar a equação diferencial em um espaço de dimensão finita. A ideia principal era escolher funções de teste idênticas às funções de base, garantindo que o resíduo da equação fosse ortogonal a um subespaço gerado por essas funções [4].

O trabalho de Galerkin foi motivado por problemas práticos em engenharia, como a análise de estruturas elásticas e placas. Sua abordagem se destacou por sua generalidade, permitindo a aplicação a uma ampla gama de problemas lineares e não lineares. Diferentemente do método de Rayleigh-Ritz, que dependia da existência de um funcional variacional, o Método de Galerkin podia ser

aplicado diretamente à forma forte da equação diferencial, tornando-o mais versátil [5] e [8].

Escolhendo a função de base por: $\phi_i(a) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{i\pi a}{L}\right)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, garantimos que formam uma base ortonormal no intervalo $[0, L]$. Uma aproximação para a solução da equação diferencial é dada pela equação (7):

$$\psi(a) \approx \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(a) \quad (7)$$

tal que, a solução é uma combinação linear das funções de base. Multiplicando a equação diferencial por uma função de base $\phi_j(a)$, admitindo como igualdade a equação (7), substituindo ambas na equação (6) e integrando por todo o domínio, podemos escrever o nosso resíduo ponderado pela função própria de base, como:

$$\int_0^L \left[-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi(a, \tau)}{\partial a^2} + \left(\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 - \Lambda a^4 - a E_n \right) \psi(a) \right] \phi_j(a) da = 0 \quad (8)$$

Que após o cálculo dos elementos de matrizes, temos o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (K_{ij} + L_{ij} + M_{ij}) c_i = E_n \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} c_i \quad (9)$$

3. Discussão dos resultados

Foi implementado em Python, um código computacional que resolve o problema de autovalor e autovetor. Assim feito, foram obtidos os níveis de energia (autovalores) e os autoestados (autovetores) correspondentes ao sistema, com constante cosmológica $\Lambda = -15$, universo com curvatura positiva $k = 1$, número de níveis de energia $N = 100$, tamanho da “caixa” $L = 2,5103$, $\hbar = 1$ e os valores de ω , β , e σ , foram discutidos em [6]. A tabela 1 mostra esses resultados e o gráfico da figura 1 mostra o comportamento das autofunções obtidas com os três primeiros níveis de energia e os autoestados.

Valor dos 10 Primeiros Níveis de Energia	
E_1	5.401391106873933
E_2	10.743242337881442
E_3	15.774673724871754
E_4	20.674377045676152
E_5	25.498298948777133
E_6	30.272035177337717
E_7	35.009669216107802
E_8	39.719869681086081
E_9	44.40839362401833
E_{10}	49.079281170677319

Tabela 1: Níveis de energia com parâmetros, $\Lambda = -15$, $\beta = 0,27$, $\sigma = 0,9999$, $k = 1$, $L = 2,5103$, $N = 100$ e $\hbar = 1$

Comparando os resultados obtidos com a implementação do Método de Galerkin em Python, conforme mostra a tabela 1, com a implementação, utilizando o Pacote *Spectral*, desenvolvido em Maple [9], utilizando os mesmos parâmetros, mostrados na tabela 2, obtendo uma variação percentual máxima de $3,14356 \times 10^{-10}$, que representa um resultado robusto.

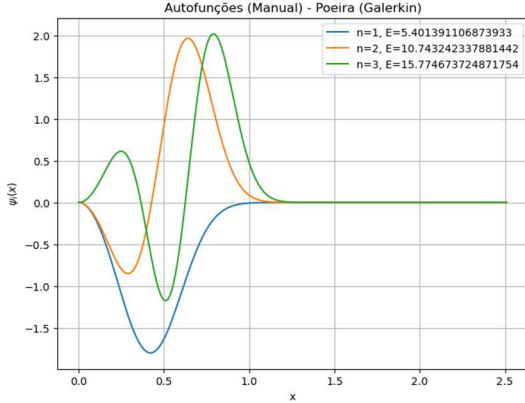


Figura 1: Autofunções dos três primeiros níveis de energia

Spectral	Varição Percentual
5,401391106878710	$8,84825 \times 10^{-11}$
10,743242337900500	$1,77797 \times 10^{-10}$
15,774673724876300	$2,91543 \times 10^{-11}$
20,674377045667000	$4,40086 \times 10^{-11}$
25,498298948716900	$2,36097 \times 10^{-10}$
30,272035177282100	$1,83668 \times 10^{-10}$
35,009669216063700	$1,25975 \times 10^{-10}$
39,719869681023000	$1,5862 \times 10^{-10}$
44,408393623878700	$3,14356 \times 10^{-10}$
49,079281170633800	$8,86309 \times 10^{-11}$

Tabela 2: Comparação do Pacote Spectral com a Implementação em Python, com os parâmetros: $\Lambda = -15$, $\beta = 0,27$, $\sigma = 0,9999$, $k = 1$, $L = 2,5103$, $N = 100$ e $\hbar = 1$

Foi construído um pacote de ondas com a superposição dos dois primeiros níveis de energia.

$$|\Psi(a, t)|^2 = \frac{1}{L} \left\{ a \sin^2 \left(\frac{\pi a}{L} \right) + a \sin \left(\frac{\pi a}{L} \right) \sin \left(\frac{2\pi a}{L} \right) 2 \cos((E_2 - E_1)t) + a \sin^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right) \right\} \quad (10)$$

O gráfico da figura 2 representa uma possível visualização do comportamento e da evolução do pacote de ondas no tempo e no fator de escala, construído de acordo com [7].

Pacote de Onda Poeira: Dois Primeiros Níveis de Energias $|\Psi(a, t)|^2$

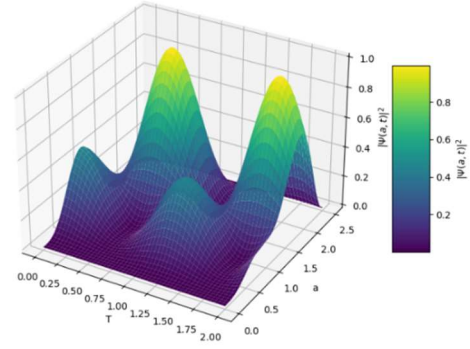


Figura 2: Pacote de ondas com a superposição dos dois primeiros autoestados

Uma vez que foram obtidos os valores de E_n e o pacote de ondas, com eles é possível calcular o valor esperado $\langle a \rangle(t)$ do fator de escala, fazendo:

$$\langle a \rangle(t) = \frac{\int_0^L a \psi^*(a, t) w(a) \psi(a, t) da}{\int_0^L \psi^*(a, t) w(a) \psi(a, t) da} \quad (11)$$

O comportamento da evolução e o valor esperado do fator de escala do universo é ilustrado pelo gráfico da figura 3. Foram construídos com base em [8].

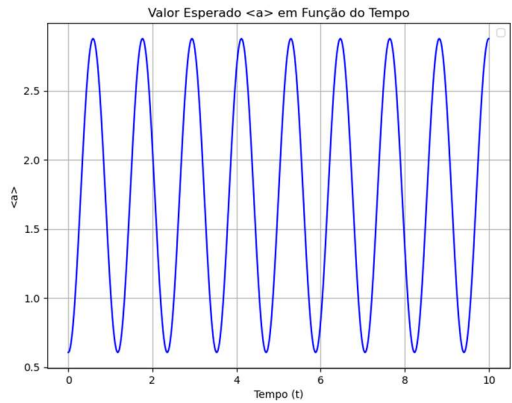


Figura 3: Comportamento do valor esperado do fator de escala do universo

4. Conclusão

O método de Galerkin e a implementação computacional desenvolvida em Python, se mostraram eficientes na resolução do problema, fornecendo corretamente os níveis de energia e os autoestados, o que foi comprovado pela comparação com a mesma implementação feita no pacote *Spectral*, que já é utilizado e consta na literatura para ampla pesquisa. Por outro lado, a implementação em Python se mostra mais acessível aos estudantes e pesquisadores da área, uma

vez que o Python é um software livre e de código aberto. Ele é distribuído sob a Python Software Foundation License (PSF License), uma licença permissiva que permite uso, modificação, distribuição e incorporação em projetos comerciais ou não comerciais, desde que sejam respeitados os termos da licença, como incluir o aviso de direitos autorais.

O fato de $|\Psi(a, t)|^2 \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow 0$ indica que a densidade de probabilidade de o universo estar em um estado com fator de escala nulo é insignificante. Isso sugere que a singularidade inicial $a = 0$ é suprimida no modelo quântico, um resultado potencialmente distinto da relatividade geral, onde singularidades são inevitáveis em modelos clássicos com fluido de poeira. Esse comportamento do Pacote de Ondas é evidenciado no gráfico da figura 2.

O valor esperado do fator de escala, $\langle a \rangle(t)$ é sempre positivo. Isso reforça a ideia de que o universo não colapsa para $a = 0$, mostrando que o modelo é uma possível correção quântica que evita a singularidade. Fato que também é evidenciado pelo gráfico da figura 3.

5. Agradecimentos

F. R. Manhães e Vagner J. Monteiro agradecem à CAPES pelo apoio financeiro. Este estudo foi financiado, em parte, pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. E ao Estado do Espírito Santo pela concessão de licença para frequência em cursos de pós-graduação stricto sensu e desenvolvimento profissional dos servidores públicos efetivos do Poder Executivo Estadual, segundo o decreto Nº 5331-R, DE 10 DE MARÇO DE 2023. G.A. Monerat agradece à FAPERJ pelo apoio financeiro parcial. G.A. Monerat e E.V. Corrêa Silva agradecem à Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, pela bolsa Prociência. G. Oliveira Neto agradece à FAPEMIG (APQ-06640-24) pelo apoio financeiro parcial. A. de O. Castro Júnior agradece a UERJ e a CAPES pelo apoio financeiro.

Este estudo, foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

7. Referências

- [1] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory**. Oxford: Pergamon Press, 1977.
- [2] DIRAC, P. A. M. **The Principles of Quantum Mechanics**. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [3] GALERKIN, B. G., **Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates**, Vestnik Inzhenerov i Tekhnikov, (Engineers and Technologists Bulletin), vol. Vol. 19, pp. 897–908, 1915.
- [4] ALVARENGA, F. G.; FABRIS, J. C.; LEMOS, N. A.; MONERAT, G. A. **Quantum Cosmological Perfect Fluid Models**. General Relativity and Gravitation, v. 34, n. 5, maio 2002.
- [5] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [6] F. G. ALVARENGA, L. A. M. DINIZ, S. V. B. GONÇALVES, G. A. MONERAT, E. V. CORRÊA SILVA, Eur. **Observational constraints on the quantum Einstein-Aether model**. Phys. J. Plus p. 138 – 975, 2023.
- [7] GRIFFITHS, DAVID J.; SCHROETER, DARRELL F. **Introduction to quantum mechanics**. Cambridge university press, 2018.
- [8] G.A. MONERAT, E.V. CORRÊA SILVA, L.B. LEAL, G. OLIVEIRA NETO. **O método de Galerkin para a quantização de sistemas Hamiltonianos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 4, 4301, 2015.
- [9] SILVA, E. V. C.; MONERAT, G. A.; OLIVEIRA NETO, G.; FERREIRA FILHO, L. G. **Spectral: Solving Schroedinger and Wheeler-DeWitt equations in the positive semi-axis by the spectral method**. Computer Physics Communications, v. 185, p. 380-391, 2014.