

Solução de Problemas de Condução Térmica Transiente em Materiais Funcionais empregando o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta

Balista, T. G.^{1*}; Loeffler, C. F.¹Lara, L. O. C.^{1&}

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

e-mail: *thiago.balista@gmail.com; ‡loefflercarlos@gmail.com; &castrolara@hotmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta a formulação e o modelo numérico do Método dos Elementos de Contorno com interpolação direta (MECID) aplicados aos problemas transientes de difusão térmica heterogêneos, nos quais as propriedades térmicas variam suavemente, como ocorre nos materiais funcionais. Em razão de sua robustez e versatilidade, o MECID trata simultaneamente o termo referente à inércia térmica e também o termo integral referente à heterogeneidade. Ambas as integrais são compostas por um núcleo não auto-adjuntos, que demandam estratégias efetivas usando funções de base radial para uma solução mais fácil e precisa, usando funções de Green mais simples, referentes aos problemas homogêneos estacionários. Com vistas à constatação da adequação do modelo proposto, são resolvidos dois exemplos-teste unidimensionais, que possuem solução analítica, demonstrando a adequação e a precisão do modelo MECID nesta categoria de problemas, de grande importância prática.

Palavras-chave: Elementos de contorno, transientes térmicos, meios heterogêneos.

Abstract

This paper presents the formulation and numerical model of the Boundary Element Method with direct interpolation (BEM) for transient heterogeneous thermal diffusion problems, in which thermal properties vary smoothly, as occurs in functional materials. Due to its robustness and versatility, the BEM model simultaneously addresses the term referring to thermal inertia and also the integral term referring to heterogeneity. Both integrals are comprised of a non-self-adjoint kernel, which demands effective strategies for an easier and more accurate solution using more simple Green functions, referring to homogeneous stationary problems. To verify the adequacy of the proposed model, two one-dimensional test examples are solved, which have an analytical solution, demonstrating the adequacy and accuracy of the DIBEM model in this category of problems, which is of great practical importance.

Keywords: Boundary elements, thermal transients, heterogeneous medium.

1. Introdução

A formulação do Método dos Elementos de Contorno com interpolação direta (MECID) tem se mostrado uma ferramenta eficaz para permitir a solução ágil de problemas nos quais os operadores diferenciais que compõem a equação diferencial parcial de governo não são auto-adjuntos. Em casos assim, nos primórdios do

MEC a adoção de células era a estratégia mais comum para se resolver tais integrais, o que conduzia a uma integração de domínio, usualmente resolvida nos moldes do Método dos Elementos Finitos. Com o surgimento da Dupla Reciprocidade [1] e outras técnicas, como o Método da Múltipla Reciprocidade e a Integração Direta (RIM) [2], a solução de integrais de domínio envolvendo incógnitas pode ser substituída

apenas pela introdução de pontos no interior, delimitando realização de integrações exclusivamente ao contorno. Contudo, muitas destas técnicas apresentam limitações matemáticas, não sendo aplicados diretamente a todos os problemas governados pela equação de campo escalar, como os casos difusivo-advectivos. Também apresentam limitações relativamente à precisão ou elevado custo computacional. Neste sentido, o MECID tem se mostrado mais robusta, geral e precisa do que as principais alternativas mencionadas, tendo sido aplicada com êxito na solução dos mais diversos problemas de campo escalar nos últimos dez anos.

Por outro lado, o problema de transmissão de calor transiente por condução em meios heterogêneos é um problema bastante comum e, portanto, de grande importância em vários setores da engenharia, como trocadores de calor, condutores elétricos e reatores nucleares, e que ganhou relevância ainda maior devido ao desenvolvimento dos materiais funcionais FGMs [3] e suas diversificadas aplicações, como as carcaças de foguetes. Os materiais funcionais podem combinar adequadamente as propriedades térmicas e mecânicas ao longo de suas dimensões, permitindo ainda a obtenção de uma melhor ponderação entre peso e resistência ao desgaste.

Apesar de muitos desenvolvimentos terem sido feitos relativamente à análise de problemas térmicos estacionários com o Método dos Elementos de Contorno (MEC), ainda há dificuldades significativas na descrição dos problemas transientes por modelos simples, pois que há casos em que a condutividade térmica varia significativamente, havendo um comprometimento da precisão do modelo. Tais dificuldades, contudo, se amplificam grandemente no caso dos processos transientes. Há vários estudos clássicos no sentido de compatibilizar a discretização espacial e a discretização temporal de modo adequado, conforme atestam as diferentes referências [4]. O esquema tradicional de diferenças finitas centrais, amplamente utilizado, de simples implementação, apresenta problemas de estabilidade e precisão, o que gerou um redirecionamento das pesquisas com o MEC utilizando a transformada de Laplace. Tal proposta, contudo, envolve uma tática eficiente de inversão e um custo computacional bem elevado, além de um modelo matemático mais elaborado.

Neste trabalho, a MECID é aplicada em problemas transientes de difusão térmica heterogêneos, nos quais as propriedades térmicas variam suavemente, empregando o esquema de diferença finita clássico para o avanço no tempo. Considera-se aqui que uma parte dos problemas numéricos observados anteriormente em metodologias afins se deve a baixa precisão da matriz de inércia térmica desenvolvida na discretização espacial. No modelo MECID, em razão de sua robustez

e versatilidade, modela-se simultaneamente o termo referente à inércia térmica e também o termo integral referente à heterogeneidade, que é igualmente uma integral composta por um núcleo não auto-adjunto. Uma análise da estabilidade e do passo de integração adequado é feita durante as simulações dos exemplos escolhidos, que possuem solução analítica. A importância da adequada correlação entre a malha de contorno, o número de pontos internos interpolantes e o passo de integração é igualmente destacada.

2. Formulação Integral

A equação que governa o estudo de condução de calor em meio heterogêneo é apresentada por:

$$[K(X)u(X, t)]_{,i} = \frac{1}{\alpha}(X)\dot{u}(X, t) \quad (1)$$

Na Eq. (1), a função $K(X)$ significa a condutividade térmica, enquanto $\alpha(X)$ representa a inércia térmica. A denominada forma integral forte [5] é obtida a partir da multiplicação da equação de governo, representada pela Eq. (3), por uma função auxiliar, seguida da integração sobre o domínio físico. Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} [K(X)u_{,i}(X, t)]_{,i} u^*(\xi; X) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha}(X)\dot{u}(X, t) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (2)$$

Na Eq. (2) a função auxiliar escolhida é a solução fundamental estacionária $u^*(\xi; X)$, que representa a solução de um problema estacionário definido em um domínio infinito $\Omega_{\infty}(X)$, na qual a ação é concentrada em um ponto específico, utilizando-se a função delta de Dirac [6], conforme transcrita abaixo:

$$u_{,ii}^*(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (3)$$

Na Eq. (3), $\Delta(\xi; X)$ é denominado delta de Dirac; ξ é o ponto fonte e representa o ponto de aplicação do carregamento atuando em um meio infinito. Assim sendo, ao aplicar a técnica de integração por partes e, em seguida, o Teorema da Divergência [7] ao termo do lado esquerdo da Eq. (2), obtém-se a Eq. (4):

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi)K(\xi) + \int_{\Gamma} K(X)q^*(\xi; X)u(X, t)d\Gamma - \\ \int_{\Gamma} K(X)q(X, t)u^*(\xi; X)d\Gamma - \\ \int_{\Omega} u(X, t)K_{,i}(X)u_{,i}^*(\xi; X)d\Omega = \\ -\frac{1}{\alpha}\int_{\Omega} \dot{u}(X, t)u^*(\xi; X)d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

Na Eq. (4), o coeficiente $c(\xi)$ é definido como um termo que depende da posição do ponto fonte ξ em relação ao domínio físico do problema [5, 7]. A função $u(X)$ representa o potencial, enquanto $q(X)$ corresponde à sua derivada normal. De forma recíproca, $u^*(\xi; X)$ é a solução fundamental do problema de Poisson, e $q^*(\xi; X)$

é a respectiva derivada direcional normal. Essas funções são expressas, respectivamente, por:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln[r(\xi; X)]}{2\pi} \quad (5)$$

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\ln[r(\xi; X)]} r_i(\xi; X) n_i(X) \quad (6)$$

Nas Eq. (5) e Eq. (6) a variável $r(\xi; X)$ significa a distância Euclidiana entre o ponto fonte e o ponto campo, e $n_i(X)$ é a normal externa ao contorno $\Gamma(X)$. Convém destacar que, no contorno do problema, impõem-se condições que definem o comportamento da temperatura, denominadas condições de Dirichlet, e condições que especificam o comportamento do fluxo, conhecidas como condições de Neumann. A notação adotada para representar essas condições está ilustrada na Figura 1, considerando um domínio bidimensional genérico $\Omega(X)$.

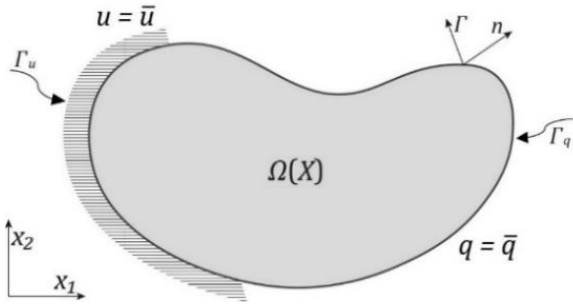


Figura 1 – Domínio bidimensional delimitado por um contorno.

Assim sendo, as condições de Dirichlet e Neumann podem ser representadas, respectivamente, conforme as Eqs. (7) e (8):

$$u(X, t) = \bar{u}, \quad \text{em} \quad \Gamma_u \quad (7)$$

$$q(X, t) = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, \quad \text{em} \quad \Gamma_q \quad (8)$$

Na Eq. (8) n é o vetor normal externo ao contorno, $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$, e as barras superiores nas variáveis das Eqs. (7) e (8) representam valores conhecidos.

3. Interpolação Direta Aplicada ao Gradiente da Condutividade Térmica

Na Eq. (4), há duas integrais de domínio cujos núcleos são não auto-adjuntos e, portanto, devem ser transformadas em integrais de contorno. A primeira está associada ao gradiente da condutividade térmica, enquanto a segunda refere-se ao termo de inércia térmica. Para ambos os casos, o procedimento da Interpolação Direta (MECID) utiliza uma técnica de aproximação baseada em funções de base radial, a qual consiste na interpolação de todo o núcleo das integrais de domínio, incluindo tanto a solução fundamental

quanto sua derivada direcional [8, 9]. No caso específico da integral relacionada ao gradiente da rigidez – ou seja, o termo integral de domínio localizado no lado esquerdo da Eq. (4) – essa interpolação é realizada por meio de uma combinação linear de funções radiais, conforme descrito a seguir:

$$u(X, t) K(X)_{,i} u^*(\xi; X)_{,i} \approx \xi \gamma^i F^i(X^i; X) \quad (9)$$

Para as primeiras simulações realizadas neste trabalho, foram utilizadas funções radiais do tipo *thin plate* [10]. Prosseguindo, no MECID a integral de domínio é convertida em uma integral de contorno por meio de uma primitiva $\Psi^i(X^i; X)$ das funções de interpolação $F^i(X^i; X)$. Nesse contexto, o núcleo da integral não pode ser tratado diretamente como apresentado na Eq. (9), uma vez que envolve a solução fundamental, o que permite que o ponto fonte coincida com os pontos de campo – uma característica típica das formulações baseadas no MEC. Diante dessa particularidade, torna-se necessário adotar um procedimento de regularização [11], o qual será retomado em outras etapas da formulação sempre que surgirem situações análogas.

$$[u(X, t) - u(\xi, t)] K(X)_{,i} u^*(\xi; X)_{,i} \approx \xi \gamma^i F^i(X^i; X) \quad (10)$$

O termo da integral de domínio é convertido em uma integral de contorno por meio da utilização de uma função primitiva, conforme descrito na Eq. (11).

$$\begin{aligned} \xi \gamma^i \int_{\Omega} F^i(X^i; X) d\Omega &= \xi \gamma^i \int_{\Omega} \Psi_{,ij}^i(X^i; X) d\Omega \\ &= \xi \gamma^i \int_{\Omega} (\Psi_{,ij}^i)_{,j}(X^i; X) d\Omega = \\ &= \xi \gamma^i \int_{\Gamma} \Psi_{,ij}^i(X^i; X) n_j(X) d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (11) na Eq. (4) e aplicando os conceitos previamente definidos no escopo deste artigo, obtém-se a Eq. (12):

$$\begin{aligned} c(\xi) u(\xi) K(\xi) + \int_{\Gamma} K(X) q^*(\xi; X) u(X, t) d\Gamma - \\ \int_{\Gamma} K(X) q(X, t) u^*(\xi; X) d\Gamma - \\ \xi \gamma^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma - \\ u(\xi, t) \int_{\Gamma} K(X) q^*(\xi; X) d\Gamma - c(\xi) u(\xi) K(\xi) = \\ -\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \dot{u}(X, t) u^*(\xi; X) d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

Na Eq. (12), os termos associados ao coeficiente $c(\xi)$ são equivalentes, o que leva ao seu cancelamento:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} K(X) q^*(\xi; X) u(X, t) d\Gamma - \\ \int_{\Gamma} K(X) q(X, t) u^*(\xi; X) d\Gamma - \\ \xi \gamma^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma - \\ u(\xi, t) \int_{\Gamma} K(X) q^*(\xi; X) d\Gamma = \\ -\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \dot{u}(X, t) u^*(\xi; X) d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

4. Interpolação Direta Aplicada ao Termo de Inércia Térmica

Mais uma vez, durante o procedimento de discretização pelo MECID, o tratamento do termo no lado direito da Eq. (13), associado à inércia térmica, leva à ocorrência de uma singularidade. Reforça-se que o procedimento de regularização desempenha um papel essencial na metodologia adotada, sendo aplicado novamente na obtenção da Eq. (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \dot{u}(X, t) u^*(\xi; X) d\Omega = \\ & \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} [\dot{u}(X, t) - \dot{u}(\xi, t)] u^*(\xi; X) d\Omega + \\ & \frac{1}{\alpha} \dot{u}(\xi, t) \int_{\Omega} u^*(\xi; X) d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

Com isso, elimina-se a singularidade decorrente da coincidência entre os posicionamentos do ponto fonte e do ponto de campo. Além disso, o termo adicional de domínio – presente no segundo termo da equação e introduzido como resultado do procedimento de regularização – também exige um tratamento algébrico específico. Nesse contexto, tal termo pode ser convertido em uma integral de contorno por meio da aplicação do conceito do Tensor de Galerkin G [12].

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \dot{u}(\xi, t) \int_{\Omega} u^*(\xi; X) d\Omega = \\ & \frac{1}{\alpha} \dot{u}(\xi, t) \int_{\Gamma} G^*(\xi; X)_{,i} n_i(X) d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, foi possível transformar todas as integrais de domínio em integrais de contorno:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} K(X) q^*(\xi; X) u(X, t) d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma} K(X) q(X, t) u^*(\xi; X) d\Gamma - \\ & u(\xi, t) \int_{\Gamma} K(X) q^*(\xi; X) d\Gamma - \\ & \xi \gamma^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma = \frac{1}{\alpha} \xi \dot{\beta}^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma - \\ & \frac{1}{\alpha} \dot{u}(\xi, t) \int_{\Gamma} G_{,j}^*(\xi; X) n_j(X) d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

Na Eq. (16), no caso do termoda derivada do potencial, $\xi \dot{\beta}^i$ são coeficientes a serem determinados, correspondendo à função de interpolação. Observa-se que tal sentença garante a base da filosofia do MEC, onde, a partir de uma equação com termo integral de domínio, alcança-se sua forma integral inversa.

5. Procedimento Matricial

Ao aplicar os procedimentos usuais de discretização do MEC, nos quais os n' pontos fonte são definidos a partir da combinação entre os valores internos e os pontos nodais de contorno, obtém-se o sistema matricial descrito na Eq. (17). Discussões mais aprofundadas sobre esse desenvolvimento podem ser encontrados na literatura especializada [13].

$$\begin{aligned} & [H]^K \{u\} - [G]^K \{q\} - \begin{bmatrix} {}^1\gamma^1 & \dots & {}^1\gamma^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\gamma^1 & \dots & {}^n\gamma^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix} = \\ & -\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} {}^1\dot{\beta}^1 & \dots & {}^1\dot{\beta}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\dot{\beta}^1 & \dots & {}^n\dot{\beta}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix} - \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Na Eq. (17), é importante enfatizar que as matrizes $[H]$, $[G]$ e $[{}^{\xi}\gamma^i]$ possuem o índice K , indicando assim a propriedade da condutividade térmica nelas. O vetor $\{N\}$ resulta da integração da função auxiliar de interpolação $\eta^i(X^i; X)$. Já o vetor $[Z]$ corresponde à forma discreta da integral excedente do Tensor de Galerkin originada pelo procedimento de regularização, conforme definido na Eq. (18):

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

A matriz diagonal $[P]$ é formada por:

$$P_{\xi} = \sum_{e=1}^m \int_{\Gamma_e} G^*(\xi; X)_{,i} n_i(X) d\Gamma_e \quad (19)$$

Retomando a Eq. (17), os coeficientes $\xi \gamma^i$ e $\xi \dot{\beta}^i$ representam as incógnitas do sistema. Dessa forma, torna-se necessário explicitar o potencial $u(X, t)$ e sua derivada temporal $\dot{u}(X, t)$, utilizando-se, para isso, interpolação com funções de base radial. Considerando que o procedimento aplicado a ambos os casos é análogo, serão apresentados, a seguir, apenas os desenvolvimentos relacionados ao termo de inércia térmica.

Em termos matriciais, com base na expressão comumente empregada para a interpolação de uma função com um único argumento independente, tem-se:

$$[F][\dot{\beta}] = \{\dot{u}\} \quad (20)$$

A Eq. (20) pode ser generalizada considerando-se que a interpolação inclui as soluções fundamentais, as quais são funções do ponto fonte:

$$[{}^{\xi}\dot{\beta}^i][F] = [{}^{\xi}\Lambda_u]\{\dot{u}(X, t) - \dot{u}(\xi, t)\} \quad (21)$$

Onde $[{}^{\xi}\Lambda_u]$ é composta pelos valores da solução fundamental. Para cada ponto fonte ξ o lado direito da Eq. (21) pode ser reescrito como:

$$[{}^{\xi}\dot{\beta}^i] = [F]^{-1} [{}^{\xi}\Lambda_u] \{\dot{u}(X, t) - \dot{u}(\xi, t)\} \quad (22)$$

O lado esquerdo da Eq. (22), pode ser reescrita em termos de um vetor $[B_{\xi_i}]$, em que cada linha é representada como na Eq. (23):

$$B_{\xi_i} = [N_1 \quad \dots \quad N_n]^T \begin{bmatrix} \xi_i \dot{\beta}^1 \\ \vdots \\ \xi_i \dot{\beta}^n \end{bmatrix} \quad (23)$$

Assim, os componentes do vetor B_{ξ_i} são dados por:

$$B_{\xi_i} = [N_1 \quad \dots \quad N_n]^T \begin{bmatrix} F^1(X^1; 1) & \dots & F^n(X^n; 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^1(X^1; n) & \dots & F^n(X^n; n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_i A_u^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi_i A_u^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{u}_{\xi_i} \\ \vdots \\ \dot{u}_n - \dot{u}_{\xi_i} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Na Eq. (24), o vetor $\{\dot{u}^\xi\}$ representa a integral excedente de contorno resultante do procedimento de regularização. Para simplificar, considera-se que o produto $[N]^T [F]^{-1}$ resulta no vetor $[S]$, que sempre se repete quando o processo de interpolação for empregado.

$$B_{\xi_i} = [S_1 \quad \dots \quad S_n] \begin{bmatrix} \xi_i A_u^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi_i A_u^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{u}_{\xi_i} \\ \vdots \\ \dot{u}_n - \dot{u}_{\xi_i} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

O índice ' n ' representa o número total de pontos fonte, incluindo os nós de contorno e os pontos internos. Assim, após os devidos desenvolvimentos algébricos, o vetor B_{ξ_i} é expresso como uma função dos potenciais:

$$B_{\xi_i} = S_1 \xi_i A_u^1 \dot{u}_1 + \dots + S_n \xi_i A_u^n \dot{u}_n - [S_n \xi_i A_u^1 + \dots + S_n \xi_i A_u^n] \dot{u}_{\xi_i} \quad (26)$$

Com os argumentos das Eqs. (17) e (25), as matrizes relacionadas à inércia térmica podem ser construídas na forma:

$$-\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} (B_1 + Z_1) \\ \vdots \\ (B_n + Z_n) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Consequentemente, o sistema matricial final pode ser expresso conforme apresentado na Eq. (28):

$$[H]^K \{u\} - [G]^K \{q\} - [W]^K \{u\} = -\frac{1}{\alpha} [M] \{\dot{u}\} \quad (28)$$

Na Eq. (28), de maneira análoga ao desenvolvimento realizado para a matriz $[M]$, é possível explicitar o potencial $u(X, t)$ na matriz que envolve a propriedade da condutividade térmica $[\xi \gamma^i]^K$, resultando $[W]^K$.

6. Discretização Temporal

Até este ponto, realizou-se a discretização espacial por meio do procedimento da Interpolação Direta (MECID). Como a aplicação se insere no contexto de problemas transientes de transferência de calor, torna-se necessário tratar a derivada temporal do potencial por meio da discretização temporal, a qual desempenha um papel fundamental para garantir a precisão, a estabilidade e a eficiência das soluções numéricas. Grande parte dos esquemas de avanço no tempo, formulados de maneira incremental e descritos na

literatura, baseia-se em princípios de discretização do domínio empregados no Método das Diferenças Finitas (MDF). No entanto, a experiência acumulada com o MDF não pode ser totalmente aplicada ao Método dos Elementos de Contorno (MEC), uma vez que este não é um método de domínio e apresenta características próprias [5].

A Equação da Difusão Transiente é classificada como uma equação diferencial parcial parabólica, representando processos de propagação lenta nos quais uma perturbação aplicada em um ponto do domínio é capaz de influenciar, ainda que de forma atenuada, toda a extensão do sistema. Embora esses processos apresentem um comportamento mais suave em comparação aos fenômenos hiperbólicos, situações envolvendo impacto térmico ou altos gradientes de temperatura podem exigir maior robustez dos esquemas numéricos utilizados na modelagem. À medida que o processo evolui, o fluxo de energia tende à estabilização, resultando, em geral, uma resposta com comportamento estável. Por exemplo, apesar de sua aplicação bem-sucedida no MDF, os testes realizados com o MECID usando o Método de Crank-Nicolson mostraram-se instáveis para qualquer valor diferente de zero do parâmetro de controle θ , que aparece na equação por diferenças finitas, conforme segue [2, 12].

$$\Delta t(\dot{u}_t) = \theta \{u_{t+\Delta t}\} + (1 - \theta) \{u_t\} \quad (29)$$

Na Eq. (29) Δt é o intervalo de integração e t são os instantes de equilíbrio. Nesta formulação, o parâmetro de controle θ está diretamente associado ao tipo de esquema de avanço adotado: quando $\theta = 0$, aplica-se o esquema de diferença finita atrasado (explícito); para $\theta = 1$, utiliza-se o esquema de diferença finita adiantado (implícito); o valor $\theta = 1/2$ caracteriza o método de Crank-Nicolson (semi-implícito); e $\theta = 2/3$ refere-se ao método de Galerkin.

Considerando derivadas de primeira ordem, o esquema de avanço temporal mais indicado para o MECID é o método explícito de diferenças finitas. Assim, a derivada temporal do potencial é calculada assumindo-se θ igual a zero. Com isso, a formulação matricial de equilíbrio, correspondente ao instante atual t , é definida pela Eq. (30):

$$[H]^K \{u\} - [G]^K \{q\} - [W]^K \{u\} = -\frac{1}{\alpha} [M] \{\dot{u}_t\} \quad (30)$$

A difusividade térmica desempenha um papel fundamental na determinação da compatibilidade do passo de integração, configurando-se como um parâmetro crucial para a prevenção de erros numéricos e instabilidades no sistema matricial discreto. Tal relação pode ser deduzida a partir da Eq. (31):

$$\frac{1}{\alpha} [M] \{\dot{u}_t\} = [M] \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\alpha \Delta t} \quad (31)$$

Assim sendo, utilizando o argumento da Eq. (31) e substituindo-o na Eq. (30), após as manipulações matemáticas, obtém-se a Eq. (32):

$$\left[\frac{1}{\alpha} \bar{M} + \Delta t \bar{H}^K - \Delta t \bar{W}^K \right] u_t - [\Delta t \bar{G}^K] q_t = -\frac{1}{\alpha} [\bar{M}] u_{t-\Delta t} \quad (32)$$

A proposta deste trabalho é estimar o passo de tempo apropriado com base em uma adaptação do critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), considerando os parâmetros da malha. Tal abordagem é análoga àquela empregada em outros métodos numéricos, nos quais a estabilidade da solução está condicionada às características espaciais e temporais da discretização:

$$\Delta t = \alpha \Delta L^2 \quad (33)$$

Na Eq. (33), ΔL representa o comprimento do maior elemento de contorno. Na literatura especializada, esse critério tem sido empregado em formulações do MEC [14] e também aplicado no contexto do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR) [15].

7. Exemplo Numérico

7.1 Comentários Preliminares

O exemplo acadêmico apresentado nesta seção, cuja solução analítica é conhecida, é utilizado com o propósito de avaliar o desempenho do modelo MECID. A análise é conduzida com base nos parâmetros de malha e na precisão dos resultados obtidos.

Para isso, empregaram-se elementos lineares com nós duplos nos vértices, combinados com malhas contendo diferentes quantidades de elementos de contorno e polos no interior do domínio. A distribuição dos polos foi realizada de forma a maximizar a uniformidade, sendo suas posições internas ajustadas conforme a geometria do contorno.

7.2 Barra submetida a fluxo unidimensional instantâneo

Avalia-se uma barra heterogênea com difusividade unitária, isolada nas extremidades horizontais e submetida a um fluxo constante aplicado de forma instantânea. As propriedades físicas consideradas são a condutividade térmica, representada por K , e a inércia térmica, indicada por α .

Ressalta-se que não há variação de α , sendo a heterogeneidade do meio atribuída exclusivamente à variação de K .

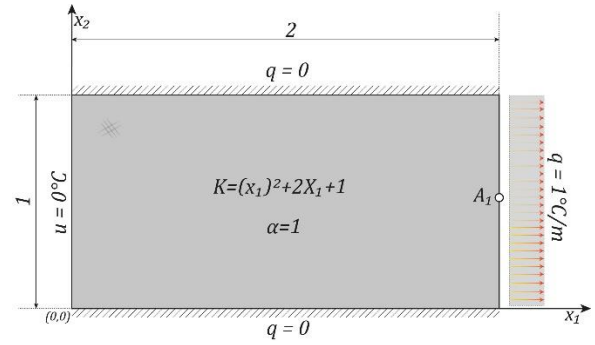


Figura 2 – Representação do domínio físico e condições de contorno.

Todos os resultados de temperatura apresentados referem-se à aresta vertical direita (no ponto A_1) e foram obtidos por meio da utilização da função *thin plate*. A solução analítica do problema, considerando condições iniciais nulas, é dada na Eq. (34):

$$u(x_1, t) = 6 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} F_{1n} \sin(q_n \ln 3) \right] e^{-\lambda n t} \quad (34)$$

A Tabela 1 apresenta algumas das raízes utilizadas na obtenção da solução analítica empregada no exemplo proposto, as quais são essenciais para garantir a precisão dos resultados.

Tabela 1: Termos para a análise de dados.

Nº de Raízes	F_{1n}	q_n
2	-10,35121791657	1,01215207
3	0,54367145935768	4,18106319
4	-0,18875703256370	7,08487025
5	0,095376812560388	9,96296016
6	-0,05746975787640	12,8327563
7	0,038395003392628	15,6988238
8	-0,02745852694786	18,5628938
9	0,020609646672823	21,4257686
10	-0,01603789795230	24,2878714

Inicialmente, foram consideradas três malhas com a mesma quantidade de Elementos de Contorno (NEC), porém com diferentes números de Polos no Interior do domínio (NPI), com o objetivo de avaliar a influência da inserção desses polos nos resultados obtidos. As especificações correspondentes a cada malha estão apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2: Especificações de cada malha.

	NEC	NPI	Total de Pontos
Malha 1	84	64	148
Malha 2	84	100	184
Malha 3	84	144	228

A Figura 3 mostra a curva de respostas obtidas nas simulações.

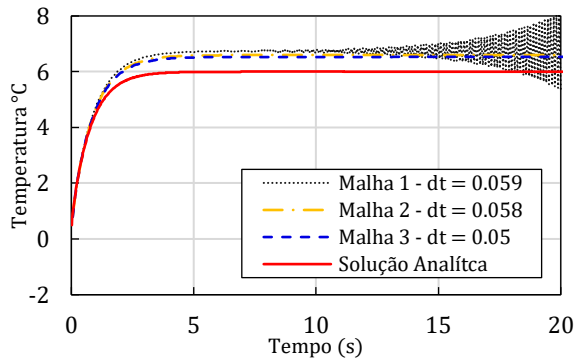


Figura 3 – Resposta temporal da temperatura para uma malha com NEC fixo, considerando diferentes níveis de refinamento de NPI, em comparação com a solução analítica.

Assim como ocorre com outros métodos numéricos, o MECID apresenta maior precisão quando se utilizam passos de tempo de integração reduzidos, desde que acompanhados de uma malha de contorno refinada e de um número adequado de polos no interior do domínio. Essa necessidade decorre da natureza de interpolação do método, que requer pontos de base internos para representar adequadamente o comportamento térmico. Por esta razão, embora usando um passo de integração maior, a malha com menor número de polos apresentou resultados instáveis para um tempo maior de resposta, conforme mostra a Figura 3. Esta figura evidencia que a introdução de NPI resultou em uma leve melhoria na solução, permitindo, como consequência, uma pequena redução no passo de integração sem ocasionar instabilidades nas curvas de resposta. No entanto, como foram utilizadas malhas simples (com baixa densidade de NPI), a ausência desses polos compromete a precisão da solução, uma vez que conduz à construção inadequada da matriz associada aos efeitos de inércia térmica. Por esta razão, há uma acentuada diferença entre as soluções numéricas e a solução analítica.

Nesse contexto, nas simulações subsequentes, tanto o número de NEC quanto o de NPI são aumentados, adotando-se uma configuração de malha mais densa, conforme apresentado na Tabela 3, na expectativa de melhoria na precisão dos resultados numéricos.

Tabela 3: Especificações de cada malha.

	NEC	PI	Total de Pontos
Malha 4	164	361	525
Malha 5	324	720	1044

Para evidenciar a importância do refinamento da malha e da redução do passo de integração na obtenção de respostas mais precisas, a Figura 4 apresenta as curvas de resposta da temperatura, obtidas com os menores valores de incremento de tempo que asseguram boa concordância com a solução analítica, sem provocar instabilidades para as respectivas configurações de malha.

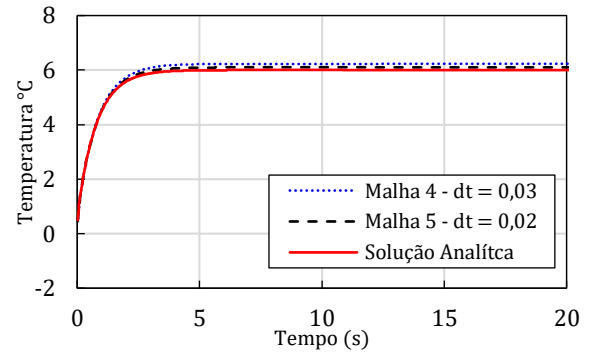


Figura 4 – Resposta temporal da temperatura para diferentes níveis de refinamento de malha (NEC e NPI), considerando um passo de tempo reduzido que garante a concordância com a solução analítica.

O refinamento da malha de NEC, combinado com a adequada inserção de NPI no domínio, permite a redução do passo de integração sem comprometer a estabilidade numérica, além de proporcionar ganhos significativos na precisão das soluções obtidas. Cabe destacar, neste ponto, que o uso de passos de integração excessivamente pequenos não apenas eleva significativamente o custo computacional, mas também pode comprometer a estabilidade do modelo, devido à assimetria das matrizes envolvidas (aspecto discutido na literatura especializada [15]). No entanto, é fundamental a realização de um estudo criterioso para a definição do incremento de tempo ideal, uma vez que esse parâmetro exerce influência na redução do amortecimento numérico.

8. Conclusões

Considerando o desempenho satisfatório das soluções da Interpolação Direta (MECID) em aplicações de elevado interesse na área da engenharia, este trabalho apresenta uma análise prévia de sua implementação em problemas transientes de condução térmica em meios heterogêneos. Os resultados obtidos confirmam a eficiência e robustez do método proposto, evidenciando um bom desempenho e compatibilidade com a solução analítica de referência.

Ressalta-se que o MECID, por se basear fundamentalmente em um procedimento de interpolação, requer a inserção de polos no interior do domínio em proporção compatível com o número de elementos de contorno. Todavia, no contexto de problemas transientes de condução térmica, a influência do número de polos torna-se menos significativa em comparação com problemas dinâmicos [16]. Ainda assim, essa influência não deve ser desconsiderada, sobretudo na análise de casos mais complexos, nos quais a distribuição e quantidade de polos podem impactar a qualidade da solução numérica.

9. Referências

- [1] NARDINI D., BREBBIA C.A. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. In: C.A. Brebbia Ed, Proceedings of BEM, p. 719-730, 1983.
- [2] KYTHE P. An Introduction to Boundary Element Methods. [S.l.]: Taylor & Francis, 1995.
- [3] SUTRADHAR, A., PAULINO, G.H., GRAY, L. Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 26(2):119-132, 2002.
- [4] Dos Santos, G. A. R. Loeffler, C. F. Bulcão, A. Lara, L. O. C. The direct interpolation boundary element method for solving acoustic wave problems in the time domain, Comp. Appl. Math. 44(68), 2025.
- [5] BREBBIA, C. A.; WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. Elsevier, 1980.
- [6] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. Boundary Element Techniques. First Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [7] BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary Elements: An introductory course. WIT press, 1996
- [8] LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 50, pp. 97-108, 2015.
- [9] BALISTA, T. G.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C.; MANSUR, W. J. Comparisons between direct interpolation and reciprocity techniques of the boundary element method for solving two-dimensional Helmholtz problems. Engineering Computations. Vol. 40, n. 9/10, p. 2841-2861, 2023.
- [10] BUHMANN, M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge university press, 2003.
- [11] Hadamard, J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Courier Corporation, 2003.
- [12] PARTRIDGE P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C.; Dual Reciprocity Boundary Element Method, Southampton: Springer, 1991.
- [13] LOEFFLE, C. F.; ZAMPROGNO, L.; MANSUR, W. J.; BULCÃO, A. Performance of compact radial basis functions in the direct interpolation boundary element method for solving potential problems. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 113(3), pp. 367-387, 2017.
- [14] WROBEL, L. C. Potential and viscous flow problems using the boundary element method, University of Southampton, Doctoral Thesis, 1981.
- [15] BREBBIA, C. A.; NOWAK, A. J. Solving Heat Transfer Problem by the Dual reciprocity BEM, chapter 1, Boundary Element Methods in Heat transfer, Wrobel and Brebbia, Editors, Computational Mechanics Publications, 1992.
- [16] SANTOS, A. J.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C. A stability analysis of the direct interpolation boundary element method applied to acoustic wave propagation problems using the modal superposition technique, Latin Am J Solids Struct. 21(1), pp. 1-19 ,2024.