

Aplicações dos Invariantes do Tensor das Tensões em Critérios de Falha

Vitória, L. R.¹ ; Loeffler C. F.¹⁺

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

e-mail: ¹⁺loefflercarlos@gmail.com; lidiaramosv@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta os principais critérios de resistência aplicados na engenharia de projeto estrutural, visando preservar a integridade de edificações, equipamentos e componentes mecânicos relativamente às diversas possibilidades de falha, seja através de ruptura ou escoamento, de acordo com as características do material empregado. Uma ênfase especial é dada na representação matemática destes critérios como funções dos invariantes associados ao tensor das tensões. Como os invariantes do tensor são quantidades que não dependem do sistema de coordenadas e possuem um significado especial relacionado à decomposição do tensor de tensões em componentes esféricas e desviadoras, é possível estabelecer um vínculo entre tais grandezas e os mecanismos de falha previstos para materiais dúcteis ou frágeis.

Palavras-chave: Critérios de Resistência; Invariantes do Tensor das Tensões, Falha em Materiais.

Abstract

This paper presents the main failure criteria applied in structural design engineering, aiming to preserve the integrity of buildings, equipment, and mechanical components about the various possibilities of collapse, whether through rupture or excessive level of yielding, according to the material characteristics. Special emphasis is given to the mathematical representation of these criteria as functions of the invariants associated with the stress tensor. Since the invariants of the tensor are quantities that do not depend on the coordinate system and have a special meaning related to the decomposition of the stress tensor into spherical and deviatoric components, it is possible to establish a link between such quantities and the failure mechanisms predicted for ductile or brittle materials.

Keywords: Strength Criteria; Stress Tensor Invariants, Material Failure.

1. Introdução

Em linhas gerais, a engenharia moderna valoriza o equilíbrio de um binômio fundamental em seus projetos: segurança e economia. No que se refere a integridade em estruturas, equipamentos ou máquinas, é preciso atender a uma série de requisitos funcionais, operacionais e resistivos, que demandam conhecimento profundo dos fenômenos físico-químicos e das condições envolvidas nas diferentes situações de projeto.

Projetos de crescente sofisticação e arrojo, aliadas as razões de economia cada vez mais pungentes criaram a necessidade de melhor compreensão do comportamento dos materiais nas diversas condições

de serviço, entre as quais a resistência, a rigidez e a estabilidade estrutural se unem à viabilidade econômica, de montagem e de manutenção, entre outros requisitos.

Assim sendo, o conceito de falha em engenharia depende de uma série de fatores. Em termos de integridade estrutural, um componente mecânico como um dente de engrenagem, pode ser classificado como falho ou inadequado se apresentar deslocamentos excessivos sem, no entanto, apresentar ruptura. Por outro lado, um cabo pode ostentar deformações significativas sem apresentar colapso.

Além das questões funcionais, o conceito de falha está estreitamente relacionado ao tipo de material empregado na confecção do equipamento ou seus

componentes. Materiais dúcteis e frágeis apresentam mecanismos de movimentação granular muito distintos, que implicam em comportamento mecânico diverso relativamente às possíveis falhas.

Não obstante apresentares limites de resistência maiores, bem como resistência mais elevada à corrosão e ao desgaste, os materiais frágeis apresentam rupturas repentinas, passando do regime elástico a falha de modo quase instantâneo. Em contraposição, os materiais dúcteis apresentam uma fase expressiva na qual apresentam grandes deformações plásticas antes da ruptura, devido à movimentação das discordâncias.

Comumente, excluindo outros fenômenos resistivos como a fadiga e a fluência, a falha em materiais frágeis é comandada basicamente pelo nível das principais tensões normais, que conduzem à falha por clivagem, enquanto o mecanismo de falha em materiais dúcteis é governado pela intensidade das tensões cisalhantes geradas pelas cargas impostas.

Um critério de resistência pode ser descrito pela intensidade das tensões e deformações ou então por medidas relacionadas à energia interna gerada no interior do material. Deve-se ressaltar que na maioria das vezes, o estado tensional ou de deformação pode ser bem complexo, principalmente se as cargas externas são espacialmente variáveis e a conformação geométrica da peça ou estrutura não for regular. Tal complexidade somente pode ser resolvida através do emprego de métodos computacionais (MEF, MEC), capazes de identificar aproximadamente, mas com precisão satisfatória às necessidades de um projeto de engenharia, a distribuição, a intensidade e a tipologia do estado de tensão e deformação gerados no interior do corpo.

Além de complexo quanto à sua distribuição, os estados de tensão e deformação são expressos por grandezas diádicas ou tensores de segunda ordem (referência), de difícil manipulação. Para superar tal dificuldade, os critérios de resistência surgem como medidas escalares (tensores de ordem zero), obtidos a partir de valores medidos em ensaios simples, uniaxiais, quase sempre envolvendo as tensões. Considerando os metais, o ensaio clássico de tração é o mais empregado, mas existem outros (Knappett e Craig, 2012).

Já os diversos critérios de resistência, além de dependerem do tipo de material, também são funções da predominância de um determinado tipo de esforço. Há casos como no estudo de solos, que os níveis de compressão muito elevados, e este é um fator crucial na escolha do critério que possa prever a falha.

Os modernos estudos costumam basear as formulações dos diversos critérios de resistência em termos dos invariantes do estado de tensão, que por sua vez, são estrategicamente equacionados com base na decomposição de tensores e segunda ordem.

A decomposição de tensores desempenha um papel crucial na análise de tensões e deformações (Malvern, 1969; Ogden, 1997), permitindo a separação de diferentes componentes que afetam o comportamento dos materiais. Um exemplo é a decomposição esférica, que separa o tensor em uma parte esférica (relacionada à dilatação) e uma parte desviadora (associada à distorção), sendo fundamental para a formulação de critérios de falha estrutural, como os critérios de Tresca e Von Mises (Hill, 1950; Chen e Han, 1988).

Este artigo apresenta os invariantes associados ao tensor das tensões e ao tensor desviador e suas aplicações em critérios de falha. Como os invariantes do tensor tensão são quantidades que não dependem do sistema de coordenadas, eles fornecem uma base para o desenvolvimento de critérios de falha. A importância do segundo e terceiro invariantes do tensor desviador é apresentada com destaque, bem como seus empregos na formulação de critérios de falha.

2. Fundamentação Teórica

A decomposição esférica é uma forma especial de decompor um tensor de segunda ordem (diádico) em duas partes: uma parte esférica (ou isotrópica) e uma parte desviadora (ou traço-zero). Essa decomposição é muito útil na mecânica do contínuo, pois permite separar o comportamento de um tensor em componentes que representam variações volumétricas e distorcionais, respectivamente, como mostra a equação a seguir:

$$\sigma = \sigma_{esf} + \sigma_{desv} \quad (1)$$

Na Eq. (1) σ_{esf} é dado por:

$$\sigma_{esf} = \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad (2)$$

No caso do estado de plano de tensão, a representação matricial desses tensores é feita conforme mostrado a seguir:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_{esf} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{desv} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix}.$$

O primeiro invariante, I_1 , descreve o comportamento isotrópico de dilatação ou contração de um material. Na mecânica dos fluidos e em situações em que a pressão média (ou tensão hidrostática) é importante, o primeiro invariante é frequentemente associado ao estado de

pressão do sistema. Este invariante é dado pelo traço do tensor σ_{esf} :

$$I_1 = \text{tr}(\sigma_{\text{esf}}) \quad (3)$$

Por questão de estratégia e simplicidade matemática, o segundo e terceiro invariantes são apresentados associados ao tensor desviador. Assim sendo, o segundo invariante J_2 escreve-se como:

$$J_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr} \sigma_{\text{desv}})^2 - \text{tr}(\sigma_{\text{desv}}^2)] \quad (4)$$

Para o estado plano de tensão, o segundo invariante J_2 assume a seguinte forma:

$$J_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}{3} \quad (5)$$

Por fim, o terceiro invariante, J_3 , é dado pelo determinante do tensor desviador:

$$J_3 = \det(\sigma_{\text{desv}}) \quad (6)$$

No estado plano de tensão, tem-se:

$$J_3 = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2)(-\sigma_1 + 2\sigma_2)(-\sigma_1 - \sigma_2)}{9} \quad (7)$$

3. Critérios de Falha

Os invariantes estão associados a muitos critérios de falha de materiais. Como são grandezas escalares, podem facilmente se relacionar aos valores de tensão de falha colhidos em ensaios experimentais, em que normalmente vigora um estado uniaxial ou, no máximo, biaxial de tensão, com componentes iguais. Ressaltando o que já foi exposto anteriormente: o estado de tensão é uma grandeza tridimensional e diádica; sua intensidade depende do plano e da direção escolhida no entorno de um ponto. Os critérios de falha são expressões matemáticas que permitem transformar esse estado complexo numa grandeza escalar, passível de comparação com dados obtidos em ensaios particulares.

3.1 Critério de Von Mises

Um dos critérios mais empregados na engenharia de projeto de componentes mecânicos é o Critério de Falha de Von Mises, ou Critério da energia de distorção máxima. O critério de Von Mises é amplamente utilizado em materiais dúcteis, especialmente em metais, pois considera que a falha ocorre devido à distorção acumulada, e não por tensões normais. Ele postula que a falha ocorre quando a energia distorcional atinge um valor crítico correspondente ao limite de escoamento do material, dado pela seguinte equação (para o estado plano de tensão) (Hibbeler, 2010):

$$\sigma_{VM}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \quad (8)$$

Ao comparar o critério de Von Mises com o segundo invariantes observa-se que:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3 J_2} \quad (9)$$

Outra forma de escrever essa equação, comum nas formulações de mecânica do contínuo e plasticidade é (Wu, 2004):

$$f = \sqrt{J_2} - k \quad (10)$$

Na Eq.(10) f define a superfície de escoamento no espaço das tensões, ou seja, o limite entre o regime elástico ($f < 0$) e o regime plástico ($f \geq 0$). Assim a falha ocorre quando a quantidade escalar associada à distorção do material atinge um valor crítico k , que é a tensão cisalhante de escoamento (Wu, 2004).

3.1 Critério de Drucker-Prager

Para solos, concreto, rochas e outros materiais que falham por cisalhamento, é frequente a utilização do modelo Drucker-Prager (Zienkiewicz e Taylor, 2000). Esse critério é uma generalização do critério de Von Mises para materiais dependentes da pressão, pois adiciona à equação da superfície de escoamento o primeiro invariante. É expresso pela seguinte equação (Alejano e Bobet, 2014):

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k \quad (11)$$

Na Eq. (11) α e k são parâmetros do material.

A Figura 1 mostra uma representação gráfica da superfície de escoamento isotrópica do Critério de Von Mises e do Critério de Drucker-Prager no espaço das tensões principais. Devido à dependência do primeiro invariante, o critério de Drucker-Prager apresenta um crescimento da área da seção transversal com as tensões principais. Tal crescimento se dá no quadrante em que todas as componentes das tensões principais são negativas, característicos de estados hidrostáticos ou preponderantemente compressivos.

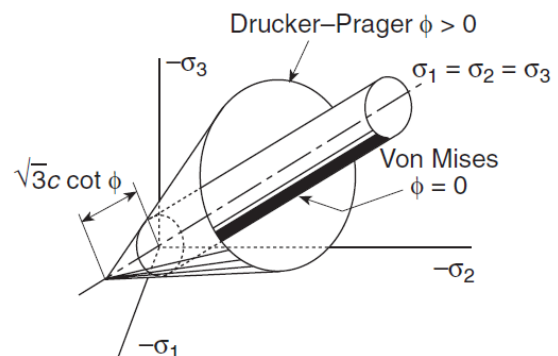


Figura 1: Superfície de escoamento de Drucker-Prager para material isotrópico no espaço das tensões principais.
Fonte: (Zienkiewicz e Taylor, 2000)

3.2 Critério de Mohr-Coulomb

Como visto, o critério de Von Mises é uma função do segundo invariante do tensor desviador, enquanto o critério de Drucker-Prager depende do tensor esférico ou primeiro invariante do tensor original. No entanto, muitos estudos mostram a importância do terceiro invariante na avaliação do escoamento de alguns materiais dúcteis e também em solos e rochas, que são materiais eminentemente frágeis (Bai e Wierzbicki, 2010; Gao e Kim, 2006; Sahadi, 2015; Wierzbicki e Xue, 2005).

Um dos critérios que levam em conta o efeito do terceiro invariante é o critério de Mohr-Coulomb. Assim como o critério de Drucker-Prager, o critério de Mohr-Coulomb tem sido amplamente utilizado na mecânica de rochas e solos, pois considera corretamente os efeitos da pressão hidrostática. Porém, adiciona também a influência do terceiro invariante, através do ângulo de Lode.

O ângulo de Lode é um parâmetro responsável pelo controle do formato da superfície de escoamento do material. É considerado um fator indispensável para a determinação completa do estado de tensão triaxial imposto (Sahadi, 2015). Diferentes estados de tensão com distintas tensões principais podem resultar em uma mesma tensão de triaxialidade (será explicada na sequência) e, nesse caso, é o terceiro invariante que faz a distinção. O ângulo de Lode (θ) é dado por:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (12)$$

A interpretação geométrica do ângulo de Lode é apresentada na Figura 2. O vetor tensão $\vec{OB}$ é decomposto nos vetores $\vec{OA}$ e $\vec{OO'}$. O vetor $\vec{OA}$ representa a parte desviadora da tensão, enquanto o vetor $\vec{OO'}$ representa a parte esférica. A razão entre as parcelas desviadora e esférica é conhecida na literatura por tensão de triaxialidade, e está relacionada ao ângulo φ , chamado de ângulo elevador (Sahadi, 2015; Wierzbicki e Xue, 2005). O ângulo de Lode é o menor ângulo formado no plano desviador entre a projeção do vetor tensão ($\vec{OB}$) e o eixo das tensões principais, ângulo $BO'P$.

O critério de Mohr-Coulomb possui um modelo matemático relativamente simples para simular o comportamento plástico do solo. É possível expressá-lo como uma função dos três invariantes da tensão (Abbo et al, 2011):

$$f = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} K(\theta) - c \cos \phi \quad (13)$$

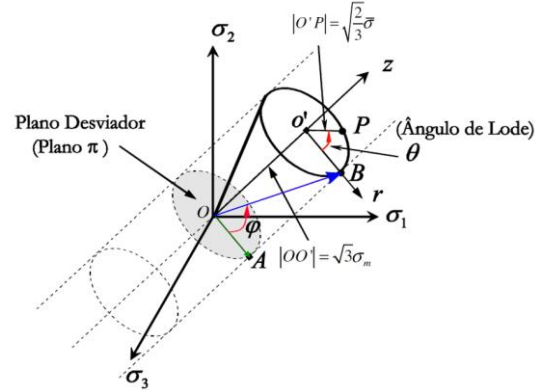


Figura 2: Representação do vetor tensão $\vec{OB}$ no plano das tensões principais, bem como dos mais importantes ângulos e medidas associados.
Fonte: (Sahadi, 2015)

Na Eq. (13) os parâmetros c e ϕ representam a coesão e o ângulo de fricção do solo, respectivamente; σ_m é a tensão normal média, $\bar{\sigma}$ é uma medida do tensor desviador, e θ é o ângulo de Lode, que pela sua definição, deve ser menor do que 30° . No espaço tridimensional (Abbo et al, 2011), pode-se deduzir que:

$$\sigma_m = I_1 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (14)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (15)$$

$$J_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{xz}^2 - s_z \tau_{xy}^2 \quad (16)$$

$$s_x = \sigma_x - \sigma_m; s_y = \sigma_y - \sigma_m; s_z = \sigma_z - \sigma_m.$$

Na Figura 3, a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é representada.

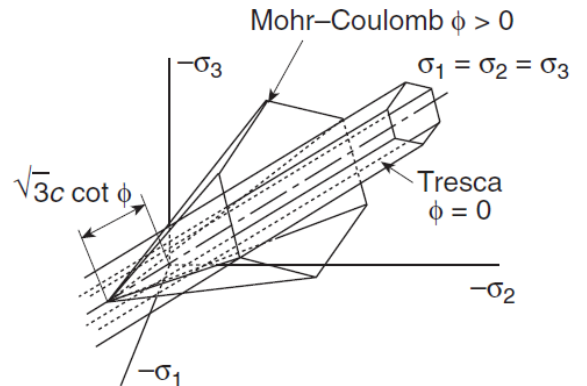


Figura 3: Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb para material isotrópico no espaço das tensões principais.
Fonte: (Zienkiewicz e Taylor, 2000)

Outros modelos constitutivos mais sofisticados para prever o comportamento do solo foram desenvolvidos nas últimas três décadas, no entanto, a complexidade

desses modelos, bem como os testes adicionais necessários para determinar os vários parâmetros do solo envolvidos, minimizam sua utilidade para engenheiros geotécnicos praticantes (Abbo et al, 2011).

3.3 Critério de Gao-Zhang, Zhou, Graham, Hayden e Roe

O critério de falha proposto por Gao et al. (2011) é baseado na dependência do estado de tensão, incorporando explicitamente a influência dos três invariantes (I_1, J_2, J_3). Ou seja, esse modelo avalia com maior precisão a influência do estado de tensão triaxial no escoamento plástico. Além disso, utiliza uma regra de fluxo não associada, o que significa que a direção da deformação plástica não segue exatamente a superfície de escoamento, permitindo maior flexibilidade na modelagem da resposta dos materiais. Esse critério foi desenvolvido para materiais isotrópicos e foi calibrado e validado com o alumínio 5083. A equação geral do critério de escoamento pode ser escrita na forma:

$$f = c_1(a_1 I_1^6 + 27 J_2^3 + b_1 J_3^2)^{1/6} \quad (17)$$

Na equação anterior a_1 e b_1 são constantes do material, e c_1 é dado por:

$$c_1 = \left(a_1 + \frac{4}{729} b_1 + 1 \right)^{-1/6} \quad (18)$$

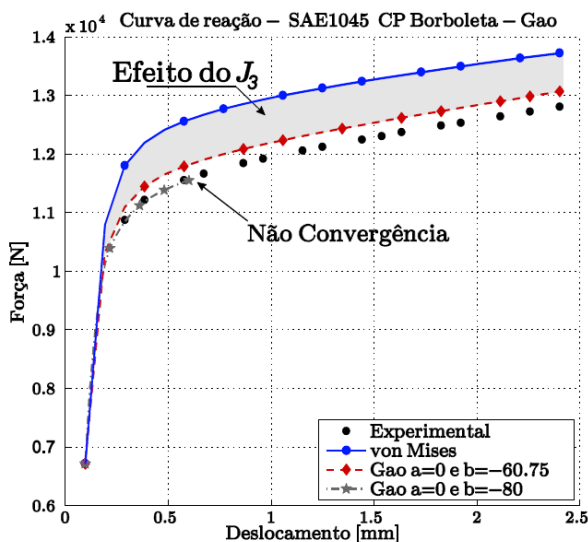


Figura 4: Curva de reação para o corpo de prova “Borboleta”.
Fonte: (Sahadi, 2015)

A Figura 4 apresenta a curva Força x Deformação de um corpo de prova composto pela liga de aço SAE1045.

Observa-se que a função de escoamento de Gao et al. (2011), ajustada com $b = -60,75$, representa melhor o comportamento do corpo de prova, quando comparada

ao critério de von Mises. Contudo, o critério de Gao et al. (2011) não converge dependendo do ajuste feito. Isso ocorre devido à mudança no perfil da superfície de escoamento, que deve ser concava, mas dependendo do ajuste pode assumir o formato convexo e assim não convergir.

3.4 Critério de Lou, Chong Zhang, Saijun Zhang e Yoon

O artigo de Lou et al. (2022) propõe uma nova função de escoamento para modelagem da resistência de materiais sob diferentes estados de tensão, levando em conta o encruamento diferencial e anisotrópico. Os critérios apresentados anteriormente, e outro na literatura, não modelam adequadamente o comportamento de endurecimento por deformação diferencial sob diferentes estados de tensão.

O modelo de Lou et al. (2022) incorpora os três invariantes do tensor de tensões (I_1, J_2, J_3) e é formulado dentro da regra de fluxo não associada, como o modelo de Gao et al. (2011). A função de escoamento é projetada para ser aplicável a metais com diferentes estruturas cristalinas (BCC, FCC, HCP) e captura a evolução da superfície de escoamento sob diferentes estados de tensão. Estender-se a materiais anisotrópicos, utilizando a transformação linear de Barlat'91, tornando-o aplicável a materiais conformados e laminados. A função de escoamento de Lou et al. (2022) é dada por:

$$f = a \left\{ b I_1 + \left[(J_2^3 - c J_3^2)^{1/2} - d J_3 \right]^{1/3} \right\} \quad (19)$$

Na expressão anterior a, b, c e d são parâmetros ajustáveis para capturar o encruamento diferencial e anisotrópico. Os parâmetros do modelo são calibrados com base em testes experimentais e simulações numéricas para diferentes estados de tensão, incluindo: tração uniaxial, cisalhamento puro, tração plana, tração equibiaxial.

Essa função de escoamento captura a dependência do estado de tensão de forma mais precisa do que os modelos tradicionais. Pode ser reduzida a modelos como von Mises e Drucker-Prager.

4. Conclusões

A análise dos critérios de falha destaca a importância dos invariantes do tensor de tensões na formulação das funções de escoamento. O segundo invariante (J_2) tem um papel central em critérios clássicos, como Von Mises e Drucker-Prager, sendo essencial para descrever o comportamento de materiais dúcteis e solos. O terceiro invariante (J_3) surge como um fator diferencial em modelos mais avançados, como os de

Gao et al. (2011) e Lou et al. (2022), permitindo capturar efeitos de triaxialidade e anisotropia, essenciais para metais com estruturas HCP e ligas metálicas avançadas.

A comparação entre os critérios revela diferenças importantes em suas aplicações. Modelos isotrópicos, como Von Mises, são adequados para metais dúcteis, enquanto Mohr-Coulomb e Drucker-Prager são mais apropriados para materiais frágeis e dependentes da pressão. Já os modelos baseados em J_3 , como Gao et al. (2011) e Lou et al. (2022), representam um avanço significativo ao integrar dependências triaxiais e permitir a modelagem precisa de materiais anisotrópicos.

Os critérios discutidos evidenciam que não há um modelo, é necessário escolher o critério adequado com base nas propriedades do material e nas condições de carregamento. A incorporação dos invariantes possibilita uma evolução nos critérios de falha, tornando-os mais precisos e amplamente aplicáveis na engenharia estrutural, metalurgia e modelagem computacional. Com a contínua evolução dos modelos constitutivos, espera-se que futuros desenvolvimentos aprimorem ainda mais a previsibilidade do comportamento dos materiais sob estados complexos de tensão.

8. Referências

- Knappett, J. A., & Craig, R. F. (2012). **Craig, mecânica dos solos**. LTC Editora.
- Malvern, L. E. (1969). **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall.
- Ogden, R. W. (1997). **Non-Linear Elastic Deformations**. Dover Publications.
- Hill, R. (1950). **The Mathematical Theory of Plasticity**. Oxford University Press.
- Chen, W. F., & Han, D. J. (1988). **Plasticity for Structural Engineers**. Springer.
- Bathe, K. J. (1996). **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall.
- Holzappel, G. A. (2000). **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. Wiley.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2000). **The Finite Element Method: Solid Mechanics**. Butterworth-Heinemann.
- Wu, H. C. (2004). **Continuum mechanics and plasticity**. Chapman and Hall/CRC.
- Hibbeler, R. C. (2010). **Resistência dos materiais**. [SI]: Pearson Prentice Hall, 2010.
- Alejano, L. R., & Bobet, A. (2014). **Drucker–prager criterion**. In *The ISRM suggested methods for rock characterization, testing and monitoring: 2007-2014* (pp. 247-252). Cham: Springer International Publishing.
- Bai, Y., & Wierzbicki, T. (2010). **Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture**. *International journal of fracture*, 161(1), 1-20.
- Abbo, A. J., Lyamin, A. V., Sloan, S. W., & Hambleton, J. P. (2011). **A C2 continuous approximation to the Mohr–Coulomb yield surface**. *International Journal of Solids and Structures*, 48(21), 3001-3010.
- Gao, X., & Kim, J. (2006). **Modeling of ductile fracture: significance of void coalescence**. *International journal of Solids and Structures*, 43(20), 6277-6293.
- Sahadi, J. V. (2015). **Estudo da fratura dúctil através de modelos dependentes do terceiro invariante do tensor desviador**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília.
- Wierzbicki, T., & Xue, L. (2005). **On the effect of the third invariant of the stress deviator on ductile fracture**. *Impact and Crashworthiness Laboratory, Technical Report – MIT*.
- Gao, X., Zhang, T., Zhou, J., Graham, S. M., Hayden, M., & Roe, C. (2011). **On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule**. *International Journal of Plasticity*, 27(2), 217-231.
- Lou, Y., Zhang, C., Zhang, S., & Yoon, J. W. (2022). **A general yield function with differential and anisotropic hardening for strength modelling under various stress states with non-associated flow rule**. *International Journal of Plasticity*, 158, 103414.